Chapitre 6

Découpages

6.1 introduction

La représentation d'une scène en trois dimension se fait généralement dans un rectangle associé au périphérique de vue. Il y a donc des primitives qui ne seront pas ou partiellement représentées dans ce rectangle. Ce chapitre aborde les problèmes qui interviennent lorsqu'on cherche à déterminer quelles seront les objets à représenter.

6.2 Découpages en 2 dimensions

6.2.1 Découpage selon une clôture rectangulaire

On aborde dans cette section le problème du découpage de primitives selon une clôture rectangulaire. Cette clôture sera définie par les valeurs x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max} correspondant respectivement aux abscisses des côtés droit et gauche et aux ordonnées des côtés bas et haut du rectangle.

Problème du point

Ici, le problème est de déterminer si un point (x, y) appartient ou pas à la surface d'un rectangle.

Il est résolu de manière triviale par quatre tests :

- $x \geqslant x_{min}$
- $x \leqslant x_{max}$
- $y \geqslant y_{min}$
- $y \leqslant y_{max}$

Problème du segment

Dans le cas d'un segment $[E1, E2]$, les choses se compliquent. En effet plusieurs cas peuvent se produire (Fig. 6.1).

Afin de réduire le nombre de calculs, on utilise l'**algorithme de discrimination de Cohen-Sutherland**.

On repère tout d'abord les cas 1 et 6. Pour cela on divise le plan en zones (Fig. 6.2).

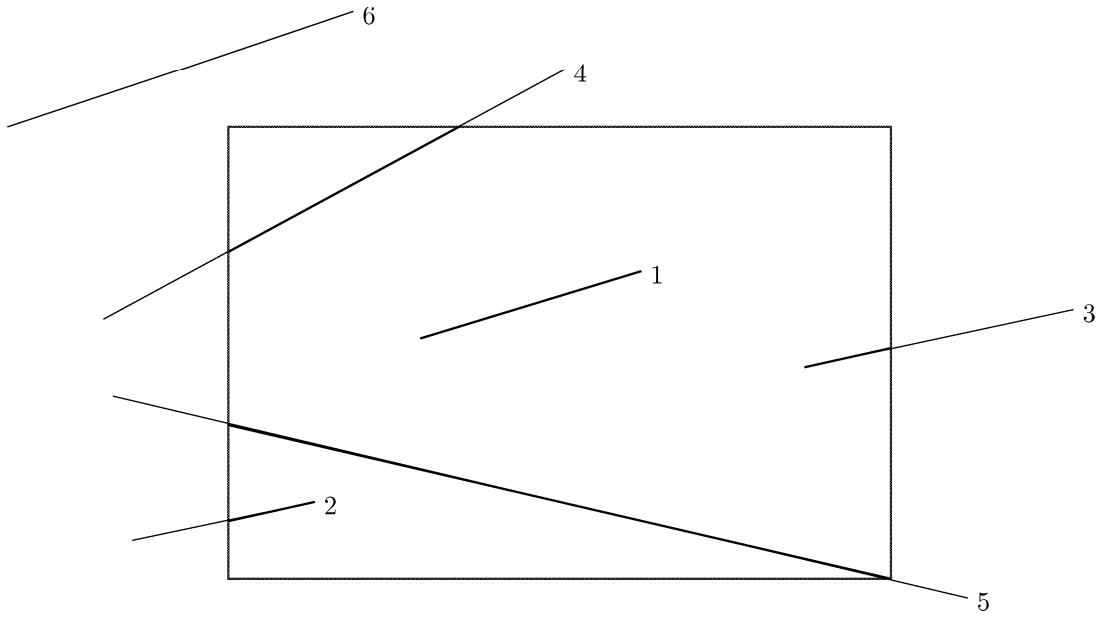

FIG. 6.1 – *Découpage d'un segment selon une clôture rectangulaire*

Un premier critère est alors : si les deux extrémités sont dans la même zone, alors le segment est soit interne, soit externe. Cependant on peut être plus précis :

$E1$	$E2$	Intersection
Haut	Haut	Non
Haut	Bas	Oui
Haut	Droite	Possible
Haut	Gauche	Possible
Haut	Haut, Droite	Non
Haut	Haut, Gauche	Non
Haut	Bas, Droite	Possible
Haut	Bas, Gauche	Possible
Haut, Droite	Haut	Non
⋮	⋮	⋮

On représenter le découpage en zones avec des ensembles (Fig. 6.3).
On vérifie alors le **critère de discrimination de Cohen-Sutherland** :

Un segment de droite sera entièrement extérieur si l'intersection des deux ensembles représentant ses extrémités n'est pas vide.

Si le critère n'est pas vérifié, l'intersection est possible. Deux méthodes sont alors envisageables :

- Subdivision par le point du milieu
- Calcul algébrique de l'intersection

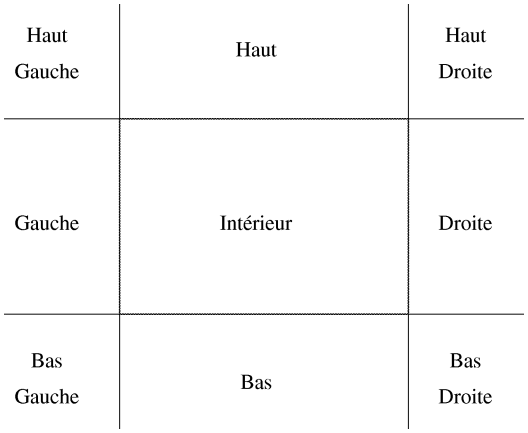

FIG. 6.2 – *Découpage du plan en zones*

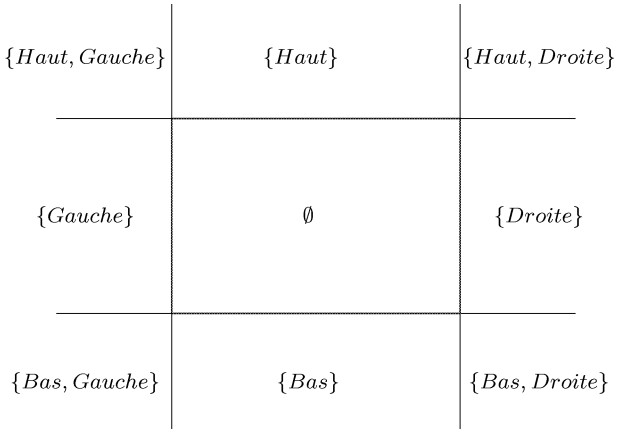

FIG. 6.3 – *Découpage ensembliste du plan en zones*

• **Subdivision par le point du milieu**

Il s'agit de l'**algorithme de subdivision de Cohen-Sutherland**.

On calcule le milieu du segment $[E1, E2]$:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_{E1} + x_{E2}}{2} \\ y_M &= \frac{y_{E1} + y_{E2}}{2} \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'il est possible d'effectuer ces opérations sur des entiers dès lors que les coordonnées de $E1$ et $E2$ sont entières.

Il suffit ensuite de recommencer l'algorithme de discrimination de Cohen-Sutherland sur les segments $[(x_{E1}, y_{E1}), (x_M, y_M)]$ et $[(x_M, y_M), (x_{E2}, y_{E2})]$. On continue jusqu'à ce que le critère de discrimination nous permette de décider ou que les extrémités soient dans la même zone (Fig. 6.4).

• **Calcul algébrique de l'intersection**

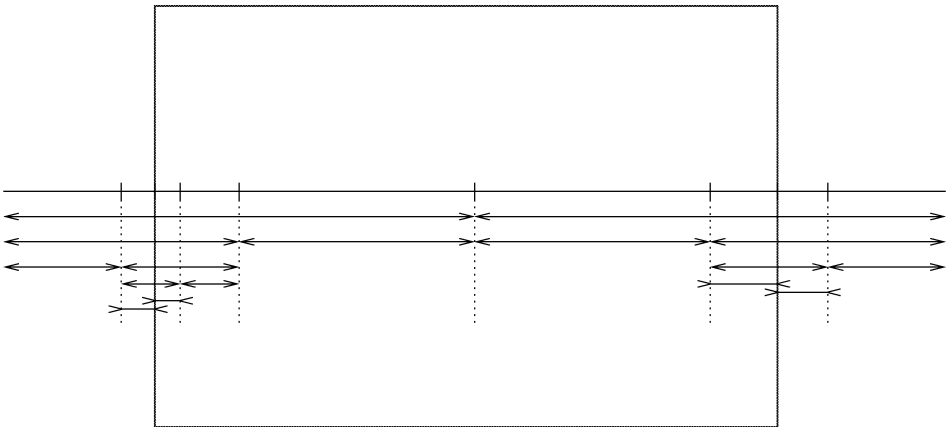

FIG. 6.4 – *Segments examinés lors de la subdivisions*

Le principe est alors de «ramener» les extrémités sur les frontières.

Prenons le cas de la frontière droite. Soit I le point d'intersection du segment $[E1, E2]$ avec la frontière (Fig. 6.5).

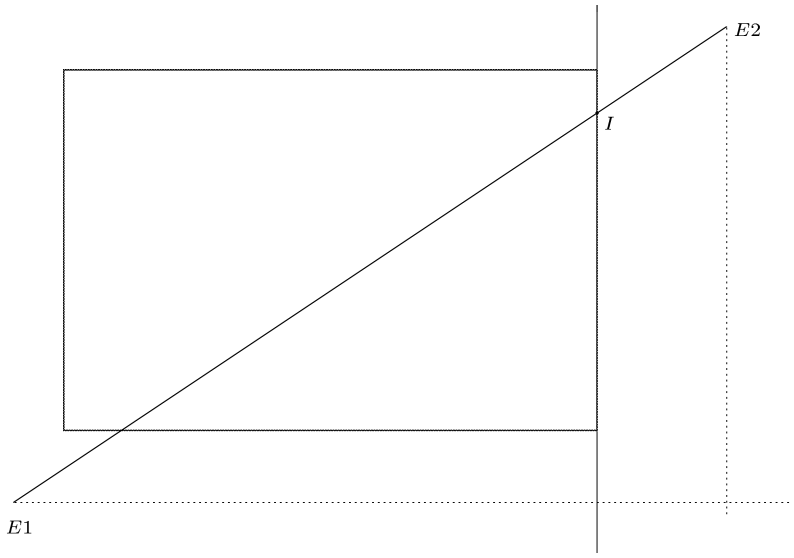

FIG. 6.5 – *Calcul de l'intersection du segment avec la frontière droite*

On a

$$\frac{y_{E2} - y_{E1}}{y_I - y_{E1}} = \frac{x_{E2} - x_{E1}}{x_I - x_{E1}}$$

Or, on veut $x_I = x_{max}$ donc

$$y_I = \frac{x_{max} - x_{E1}}{x_{E2} - x_{E1}}(y_{E2} - y_{E1}) + y_{E1}$$

Il faut ensuite recommencer pour les autres frontières.

6.2.2 Découpage selon un polygône quelconque

Découper un polygône selon une frontière rectangulaire revient à calculer l'intersection de deux polygônes (fig. 6.6).

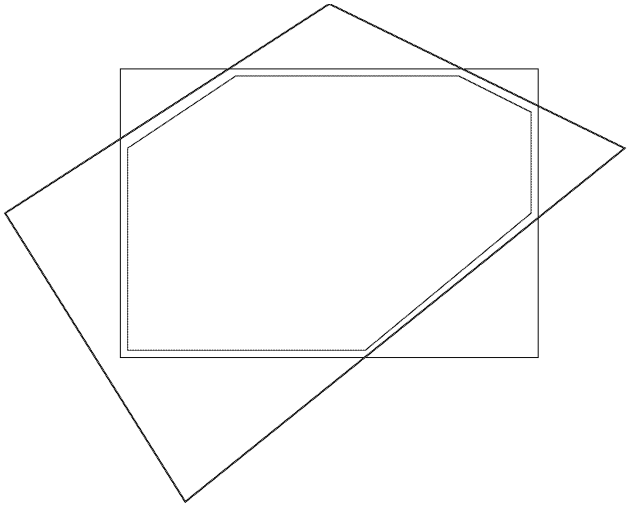

FIG. 6.6 – *Découpage d'un polygône*

Dans le cas de polygônes concaves, ceux-ci peuvent dégénérer (fig. 6.7).

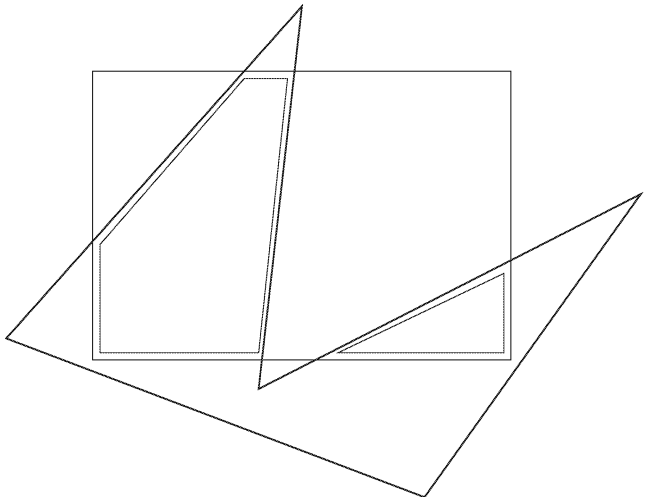

FIG. 6.7 – *Découpage d'un rectangle en rectangles dégénérés*

Nous présentons dans cette section une méthode très générale, elle s'applique à l'intersection de polygônes quelconques avec une clôture convexe.

L'algorithme de Sutherland et Hodgman

On se ramène au découpage par un côté (ou par un plan dans l'espace). Pour chaque côté de la clôture, le polygône est parcouru côté par côté. Pour cela l'algorithme crée une liste des sommets du polygône. Il parcourt ensuite cette liste pour créer une nouvelle liste de côté. Les sommets de

la liste sont considérés deux par deux. Pour chaque couple (A, S), on applique les règles suivantes (fig. 6.8):

- Si les deux extrémités (A, S) du côté du polygône sont dans le volume délimité par la clôture, on ajoute dans la nouvelle liste le sommet S.
- Si les deux extrémités (A, S) sont hors du volume, on n'ajoute pas de point.
- Si A est extérieur et S intérieur à la clôture, on calcule l'intersection I du côté avec la clôture et on ajoute I puis S.
- Si A est intérieur et S extérieur à la clôture, on calcule l'intersection I du côté avec la clôture et on ajoute I.

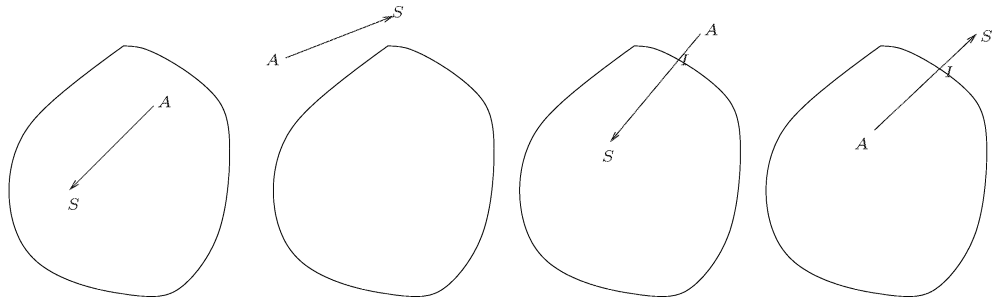

FIG. 6.8 – *Les quatre cas de l'algorithme de Sutherland-Hodgman*

Les points d'intersections sont calculés à partir des méthodes vues précédemment.

Si on ajoute le premier point à la fin de la liste des sommets, aucun traitement spécial n'est nécessaire.

6.3 Découpages en 3 dimensions

Les algorithmes vus précédemment se généralisent facilement au découpage selon un volume de vue. Nous précisons dans cette section les calculs à effectuer pour calculer les intersections d'un segment avec la clôture (c'est le seul point qui peut se révéler délicat).

6.3.1 Intersection avec une clôture parallélépipédique

Détermination du point d'intersection d'un segment avec la clôture parallélépipédique.

Prenons l'exemple d'un plan d'équation $x = a$.

Soit le segment d'équation paramétrique $\overrightarrow{P(t)} = \overrightarrow{P_1} + \left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right) t$. où $\overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{P_2} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$.

On veut alors $a = X_1 + (X_2 - X_1)t$ et donc, on obtient $t = \frac{a - X_1}{X_2 - X_1}$.

Le point d'intersection est donc

$$\begin{pmatrix} a \\ \frac{-a+X_2}{X_2-X_1} Y_1 + \frac{a-X_1}{X_2-X_1} Y_2 \\ \frac{-a+X_2}{X_2-X_1} Z_1 + \frac{a-X_1}{X_2-X_1} Z_2 \end{pmatrix}$$

6.3.2 Calcul de l'intersection pour une projection perspective

Dans le cas d'une projection perspective, le volume de vue est alors une pyramide tronquée.

On doit tout d'abord déterminer le critère d'intersection. Prenons, par exemple, le plan supérieur (passant par O). L'équation du plan (selon l'angle d'ouverture γ) est (fig. 6.9) :

$$\tan\frac{\gamma}{2} = -\frac{y}{z}$$

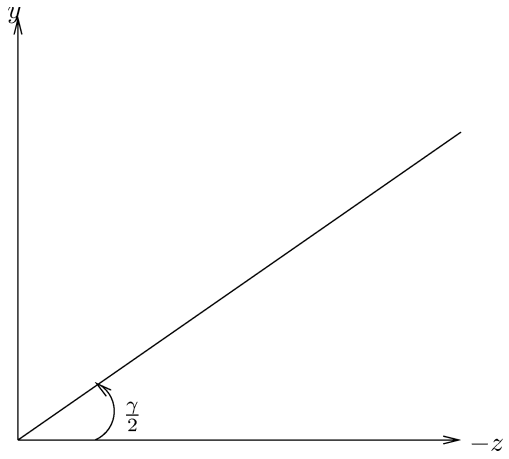

FIG. 6.9 – *Plan supérieur de la projection perspective*

Un point (x, y, z) est intérieur au volume si $z < 0$ et si l'angle associé α est compris entre $-\frac{\gamma}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$, et donc si $|\tan\alpha| < \tan\frac{\gamma}{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Or, on a $\tan\alpha = -\frac{y}{z}$ donc, il faut $|-\frac{y}{z}| < \tan\frac{\gamma}{2}$, soit

$$|y| < -z\tan\frac{\gamma}{2}$$

(on a $z < 0$).

Découpage d'un segment pour une projection perspective

Soit $\overrightarrow{P}$ le point d'intersection du segment $\overrightarrow{P(t)} = \overrightarrow{P_1} + \left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right) t$ avec le plan de normale $\overrightarrow{F}$ (passant par O).

Le point $\overrightarrow{P}$ appartient au plan, on a donc

$$\overrightarrow{P}.\overrightarrow{F} = 0$$

Donc, comme il appartient au segment, on a

$$(\overrightarrow{P_1} + \left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right) t).\overrightarrow{F} = 0$$

soit

$$t = -\frac{\overrightarrow{P_1}.\overrightarrow{F}}{\left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right).\overrightarrow{F}}$$

Par exemple, pour le plan précédent, on peut prendre $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\overrightarrow{P_1}.\overrightarrow{F} = Y_1 + \tan\frac{\gamma}{2}Z_1$$

et

$$\left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right).\overrightarrow{F} = Y_2 - Y_1 + \tan\frac{\gamma}{2}(Z_2 - Z_1)$$

ainsi

$$t = -\frac{Y_1 + \tan\frac{\gamma}{2}Z_1}{Y_2 - Y_1 + \tan\frac{\gamma}{2}(Z_2 - Z_1)}$$

6.4 OpenGL

On peut définir, en OpenGL, des «plans de coupes» en plus des six plans inhérents au volume de vue. On utilise pour cela la fonction

```
void glClipPlane(GLenum plane, const GLdouble *equation);
```

L'argument `plane` peut prendre les valeurs `GL_CLIP_PLANE0`, ..., `GL_CLIP_PLANE5` (on peut donc définir 6 plans de coupe supplémentaires). Le tableau `equation` contient les valeurs a, b, c, d de l'équation du plan de coupe $ax+by+cz+d = 0$. Seuls les points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$ dans le repère de l'observateur vérifiants

$$(abcd)M^{-1}\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} >= 0$$

sont représentés (où M est la matrice modèle/vue au moment où on a défini le plan de coupe).

On active la gestion des plans de coupe par :

```
void glEnable(GL_CLIP_PLANEi)
```

où $i \in [0, 5]$. On les désactive par `void glDisable(GL_CLIP_PLANEi)`.

Le «clipping» des plans de coupe est effectué dans le repère de l'observateur. On peut également effectuer un découpage dans le plan de projection :

```
void glScissor(GLint x, GLint y, GLsizei width, GLsizei height).
```

Cette fonction définit un rectangle en coordonnées écran, tout pixel à l'extérieur de ce rectangle ne sera pas affiché.

On active ce découpage par :

```
void glEnable(GL_SCISSOR_TEST).
```